



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA ECONÓMICA Y CIENCIAS SOCIALES

4ª PRÁCTICA CALIFICADA DE ALGEBRA

LINEAL

1.- Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justificar su respuesta, usando argumentos teóricos.

a) Existe un plano que pasa por la intersección de los planos:

$$4x - 2y + 6z - 10 = 0; 3x + 6y - 3z + 6 = 0 \text{ y es paralela al vector}$$

$$(1; -1/2; -1)$$

b) Existe un plano que contiene al punto $(1; 2; -3)$ y sea paralelo al plano $3x - y + 2z = 4$.

c) Existe una recta que pasa por el punto $(1, -1, 1)$, ortogonal a la recta $3x = 2y = z$, y paralela al plano $x + y - z = 0$.

2.- Dado el triángulo ABC, con $B = (-5, 2, 7)$, las rectas

$$L_1: x = 1, y - 3 = \frac{z - 3}{2}, L_2: \frac{x + 2}{-3} = \frac{y - 1}{-1} = z - 2 \text{ son medianas trazadas}$$

desde A y C respectivamente. Determine los vértices del triángulo ABC.

$$3.- Dadas las rectas $L_1: \frac{x - 8}{7} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z - 1}{3}, L_2: x - 4 = \frac{y + 1}{-1} = z + 3$.$$

Determine la ecuación de la recta que contiene a la distancia mínima entre L_1 y L_2 .

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA ECONÓMICA Y CIENCIAS SOCIALES

4. Dados la recta $L: \frac{x+5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-10}{3}$ y el punto $C = (5, 4, 8)$. Los puntos A y B se encuentran en la recta de modo que el triángulo ABC isósceles de área $24\sqrt{11}u^2$. Determine los puntos A y B.

EL PROFESOR

UNI 0607240

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA ECONÓMICA Y CIENCIAS SOCIALES

4. Dados la recta $L: \frac{x+5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-10}{3}$ y el punto $C = (5, 4, 8)$. Los puntos A y B se encuentran en la recta de modo que el triángulo ABC isósceles de área $24\sqrt{11}u^2$. Determine los puntos A y B.

EL PROFESOR

UNI 0607240

$$1) \text{ A) } 4x - 2y + 6z - 10 = 0 \Rightarrow y = 2x + 3z - 5$$

$$3x + 6y - 3z + 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{z}{2} - \frac{x}{2} - 1$$

$$\Rightarrow \left(2x + 3z - 5 = \frac{z}{2} - \frac{x}{2} - 1 \right) \times 2$$

$$4x + 6z - 10 = z - x - 2$$

$$5z + 5x = 8 \rightarrow (\text{RECTA})$$

$$z = \frac{8}{5} - x$$

$$\Rightarrow \text{Como } y = 2x + 3z - 5 = 2x + 3\left(\frac{8}{5} - x\right) - 5$$

$$y = -\frac{51}{5} - x$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = \left(x, -\frac{51}{5} - x, \frac{8}{5} - x\right)$$

$$= \left(0, -\frac{51}{5}, \frac{8}{5}\right) + x(1, -1, -1)$$

VECTOR \vec{u}
(VECTOR PARALELO)

$$\Rightarrow \vec{v} = (1, -1, -1) \neq \lambda(1, -1, -1)$$

NO ES PARALELO

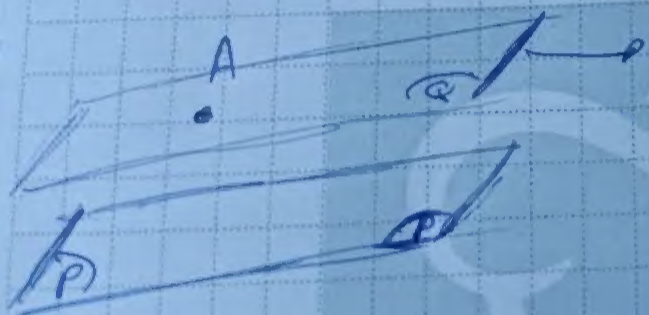
◦ FALSO



B) Como $\overbrace{(1, 2, -3)}^A \notin \underbrace{3x - y + 2z = 4}_{\text{Plano } P^1}$

$$3(1) - 2 + 2(-3) = 4$$

$$-5 = 4 \quad \left(\begin{array}{l} \text{EL PUNTO NO PERTENECE} \\ \text{AL PLANO} \end{array} \right)$$



SI EXISTE LA POSIBILIDAD

$$Q \parallel P$$

$$A \in Q$$

o.o VERDADERA

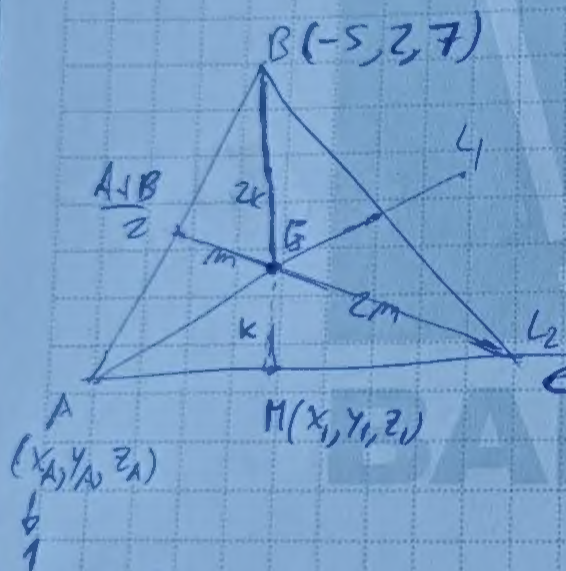
2) $\vec{L}_1 \cap \vec{L}_2$ (BARICENTRO)

$x=1$; como DE \vec{L}_2 : $\frac{x+z}{-3} = \frac{y-1}{-1} = z-2$
 $\underbrace{x=1}_{\text{DE } \vec{L}_1}$

$\frac{1+z}{-3} = \frac{y-1}{-1} = z-2$
 $\underbrace{\frac{1+z}{-3}}_{-1}$

$y=2$; $z-2=-1 \Rightarrow z=1$

INTERSECCIÓN: $G(1, 2, 1)$



$G = \frac{M(2) + B(1)}{3}$

$(1, 2, 1) = \frac{M(2) + (-5, 2, 7)}{3}$

$(3, 6, 3) - (-5, 2, 7) = 2M$

$M = (4, 2, -2)$

$G = \frac{C + 2\left(\frac{A+B}{2}\right)}{3} \Rightarrow G = \frac{A+B+C}{3}$

Como $M = \frac{A+C}{2} \Rightarrow (4, 2, -2) = \left(\frac{1+x_C}{2}, \frac{y_A+y_C}{2}, \frac{z_A+z_C}{2}\right)$

$\Rightarrow x_C = 7$; EN \vec{L}_2 : $\frac{7+z}{-3} = \frac{y-1}{-1}$

$y=4$; $z-2 = \frac{7+z}{-3} \Rightarrow z=-1$



$$\Rightarrow C = (7, 4, -1)$$

$$M = \frac{A+C}{2} \Rightarrow (4, 2, -2) = \frac{A + (7, 4, -1)}{2}$$

$$A = (8, 4, -4) - (7, 4, -1)$$

$$A = (1, 0, -3)$$

0
0 0 RPIA

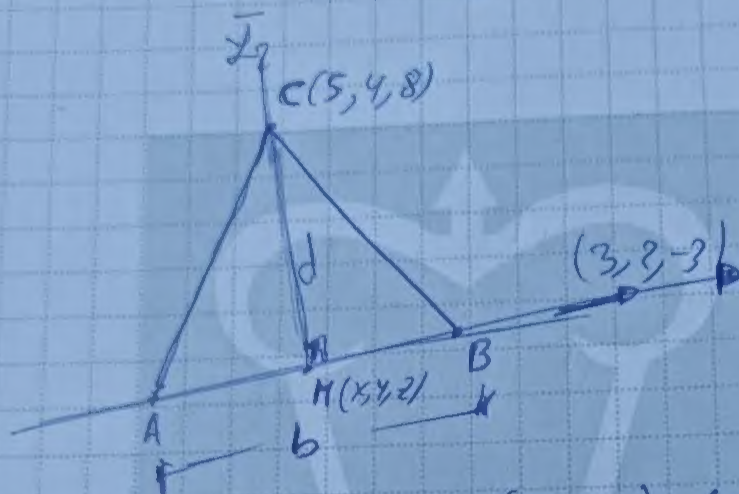
$$A = (1, 0, -3)$$

$$B = (-5, 2, 7)$$

$$C = (7, 4, -1)$$

~~4) $L: \frac{x+5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-10}{-3}$~~

4) $L: \frac{x+5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-10}{-3}; \quad \vec{m} = (3, 2, -3)$



~~$(3, 2, -3) \cdot (3, 2, -3) = 10$~~

$(C-H) \cdot (3, 2, -3) = 0$

$((5, 4, 8) - H) \cdot (3, 2, -3) = 0$

(x, y, z)

$(5-x, 4-y, 8-z) \cdot (3, 2, -3) = 0$

$15 - 3x + 8 - 2y - 24 + 3z = 0$

$-1 = 3x + 2y - 3z \quad L_2$

$L_1 \cap L_2 \Rightarrow DE L: y = \frac{2x+10}{3}; z = 5-x$

En $L_2: -1 = 3x + 2\left(\frac{2x+10}{3}\right) - 3(5-x) = 3x + \frac{4x}{3} + \frac{20}{3} - 15 + 3x$

$-1 = \frac{22x}{3} - \frac{25}{3} \Rightarrow -3 = 22x - 25 \Rightarrow x = 1$

$y = \frac{2(1)+10}{3} = 4; \quad z = 5-1 = 4 \quad \therefore H = (1, 4, 4)$



$$d = d(C, M) = \sqrt{(5-1)^2 + (4-4)^2 + (8-4)^2}$$

$$d = \sqrt{16+0+16} = 4\sqrt{2}$$

$$A : \text{AREA} = \frac{d \cdot b}{2} = 24\sqrt{11}$$

$$\frac{24\sqrt{2}}{2} b = 24\sqrt{11} \Rightarrow b = 12 \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$b = \frac{12\sqrt{22}}{2} = 6\sqrt{22}$$

$$d(M, B) = \frac{b}{2} = 3\sqrt{22} \Rightarrow B = M + \hat{u}(3\sqrt{22})$$

$$B = (1, 4, 4) + \frac{(3, 2, -3)}{\sqrt{3^2+2^2+3^2}} 3\sqrt{22}$$

$$B = (1, 4, 4) + \frac{(3, 2, -3)}{\sqrt{22}} 3\sqrt{22} = (1, 4, 4) + (9, 6, -9)$$

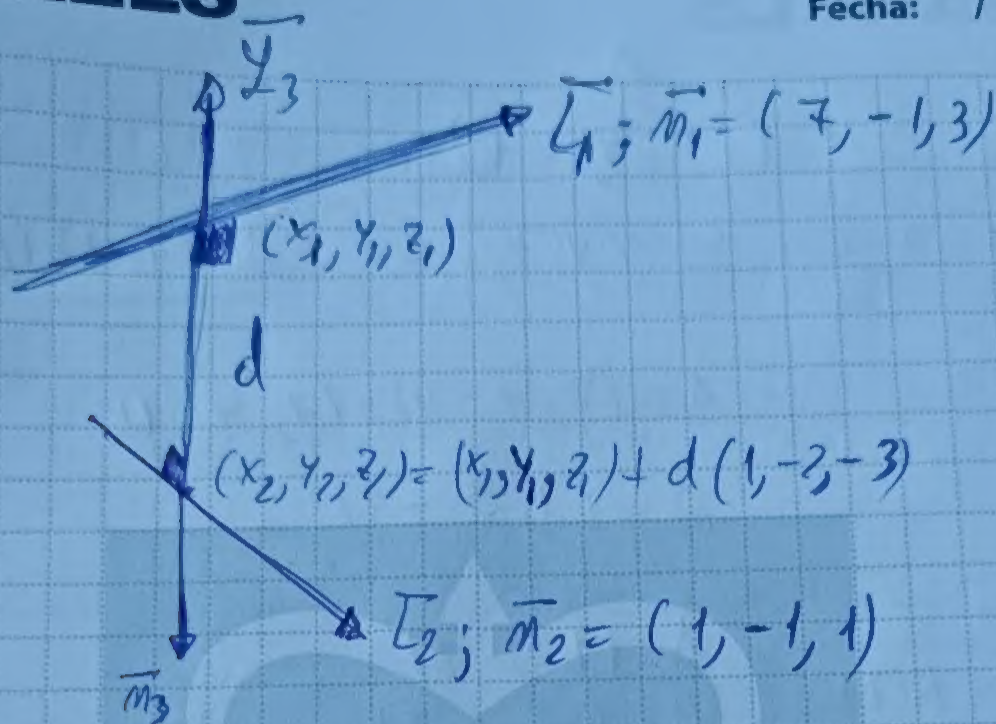
$$B = (10, 10, -5)$$

$$\text{Como } M = \frac{A+B}{2} \Rightarrow (1, 4, 4) = \frac{(10, 10, -5) + A}{2}$$

$$A = (-8, -2, 13)$$

$$A = (-8, -2, 13) ; B = (10, 10, -5)$$

3)



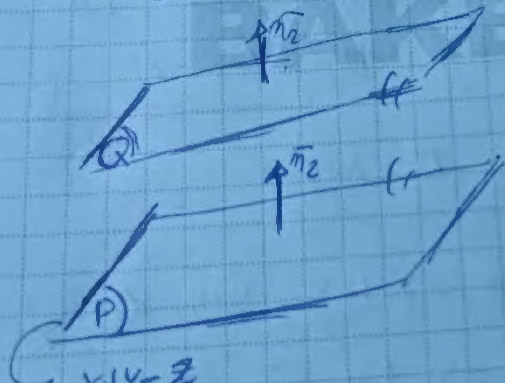
$$\vec{n}_3 \perp \vec{n}_1 \quad \text{y} \quad \vec{n}_3 \perp \vec{n}_2$$

$$\vec{n}_3 = \begin{vmatrix} \hat{i} & -\hat{j} & \hat{k} \\ 7 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k} = 2(1, -2, 3)$$

$$L_3: \frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{-2} = \frac{z-z_0}{-3}$$

c) $3x = 2y = z \Rightarrow \frac{x}{1/3} = \frac{y}{1/2} = \frac{z}{1} \quad (\mathcal{L}_1)$

$\vec{m}_1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1)$ (NORMAL)



$x+y-z=0$
 $\vec{m}_2 = (1, 1, -1)$

◦ = FALSE

RECIA $\parallel \vec{m}_1$

$\mathcal{L}: P + \lambda(\vec{m}_1)$

com $\vec{m}_2 \perp \mathcal{L}$

$\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 = 0$

$(1, -1, 1) \cdot (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1) = 0$

$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 \neq 0 \Rightarrow \frac{5}{6} \neq 0$

(NO COMPLY)

◁ NO EXISTE



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA ECONÓMICA, ESTADÍSTICA Y CIENCIAS SOCIALES

EXAMEN

P

F

S

PRACTICA N°

0

Nombre Curso: Álgebra Lineal

Código Curso:

UNI OS de Julio

del 2024

NOTA

EN NÚMEROS

EN LETRAS

FIRMA DEL PROFESOR

③ $L_1 = \frac{x-8}{7} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{3} = t$
 $x = 7t + 8; y = 2 - t; z = 3t + 1$
Entonces L_1 será:
 $L_1 = \{(8; 2; 1) + t(7; -1; 3)\}, t \in \mathbb{R}$

$L_2 = x - 4 = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{1} = m$
 $x = m + 4; y = -m - 1; z = m - 3$

Entonces L_2 será:

$L_2 = \{(4; -1; -3) + m(1; -1; 1)\}, m \in \mathbb{R}$

Supongamos que L contiene a la distancia mínima entre L_1 y L_2 .
Entonces la direccional de L será igual al producto vectorial de las
direccionales de L_1 y L_2 . Por lo que:

Direccional $L = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Direccional } L = \{(2; -4; -6)\}$

Entonces L tendrá la forma:
 $L = \{(x_0; y_0; z_0) + \lambda(2; -4; -6)\}, \lambda \in \mathbb{R}$
 $L = \{(x_0; y_0; z_0) + \lambda(1; -2; -3)\}, \lambda \in \mathbb{R}$

Hallamos $(x_0; y_0; z_0)$ que representa al punto de paso:

Para ello le damos el valor $m=4$ a L_2 para que nos proporcione
un punto P_0 tal que $P_0 = (x_0; y_0; z_0)$ y $P_0 \in L_2, L_1$.

$P_0 = (4; -1; -3) + (1; -1; 1)$

$P_0 = (5; -2; 2)$

Reemplazamos en L y obtenemos:

$L = \{(5; -2; 2) + \lambda(1; -2; -3)\}, \lambda \in \mathbb{R}$

①

a) VERDADERO:

Para obtener la intersección de los planos igualamos las ecuaciones:

$4x - 2y + 6z - 10 = 3x + 6y - 3z + 6$

$0 = x - 8y + 9z - 16$

Obtenemos el plano $P: x - 8y + 9z - 16 = 0$

Ahora, para que P sea paralela al vector $(1; -1/2; -1)$, la intersección
debe ser diferente de cero por lo que:

$(1) - 8(-\frac{1}{2}) + 9(-1) \neq 0$

$1 + 4 - 9 \neq 0$

$\{-4 \neq 0\}$

Por lo tanto, la proposición es VERDADERA.

$(B) \subset \mathbb{R}^3$
 $B = \{(2, 1, 1), (1, 3, 1)\}$
 B y C son vectores
 son bases
 cuando
 B y C son vectores
 B y C son bases
 B y C son bases
 B y C son bases

b) VERDADERO.

Ese plano tendría como punto de paso a $P_0 = (1, 2, -3)$ y tendría como vector normal al mismo que el plano $3x - y + 2z = 4$, por lo que sería de la forma $P = 3x - y + 2z = d$

En el cual reemplazamos las coordenadas del punto y obtenemos que: $3(1) - (2) + 2(-3) = d$
 $\rightarrow (d = -5)$

Entonces el plano en cuestión sería: $P = 3x - y + 2z + 5 = 0$

c) VERDADERO

La recta sería de la forma: $L = \{(1, -1, 1) + t\vec{a}\}, t \in \mathbb{R}$
 donde $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$ y \vec{a} sea paralela al plano $x + y + z = 0$.
 \vec{a} es la direccional de la recta $3x = 2y = z$

$$\vec{a} \cdot (2; 3; 6) = 0, \text{ si } \vec{a} = (a; b; c)$$

$$(2a + 3b + 6c = 0)$$

$$\vec{a} \cdot (1; 1; -1) = 0$$

$$(a + b - c = 0)$$

O también más directo: $\vec{a} = \vec{a} \times \vec{b}$, donde \vec{a} es direccional de la recta $3x = 2y = z$ y \vec{b} el vector normal de $x + y + z = 0$

$$\vec{a} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{a} = (2; 3; 6) \times (1; 1; -1)$$

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \vec{a} = (-9; 8; -1)$$

Entonces la recta en cuestión sería: $L = \{(1, -1, 1) + t(-9; 8; -1)\}, t \in \mathbb{R}$

④ $L = \{(-5; 0; 10) + t(3; 2; -3)\}, t \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad C = (5; 4; 8)$

$$A = (-5 + 3\alpha; 2\alpha; 10 - 3\alpha)$$

$$B = (-5 + 3\beta; 2\beta; 10 - 3\beta)$$

$$C = (5; 4; 8)$$

• Por área sabemos que:

$$A_{\Delta} = \frac{d(C; L) \cdot |AB|}{2} = 24\sqrt{11}$$

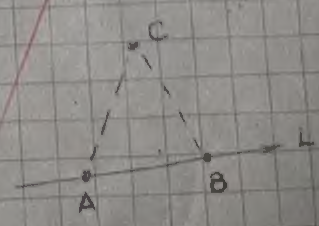
$$\frac{|\vec{P_0C} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|} \cdot |AB| = \frac{|[(5; 4; 8) - (-5; 0; 10)] \times (3; 2; -3)| \cdot |B - A|}{|(3; 2; -3)|} = 48\sqrt{11}$$

$$= \frac{|(10; 4; -2) \times (3; 2; -3)| \cdot |(3; 2; -3)| \cdot (B - \alpha)}{|(3; 2; -3)|} = 48\sqrt{11}$$

$$= \frac{|(-8; 24; 8)| \cdot |(3; 2; -3)| \cdot (B - \alpha)}{|(3; 2; -3)|} = 48\sqrt{11}$$

$$= \frac{8\sqrt{11} \cdot (B - \alpha)}{1} = 48\sqrt{11}$$

$$B - \alpha = 6$$



-ADADERO.

W = 2 $\{(\vec{a}), (\vec{b}), (\vec{c})\}$ $B_W = \{(\vec{a}), (\vec{b}), (\vec{c})\}$, cuando $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ los
 \vec{a}, \vec{b} y \vec{c} son vectores linealmente independientes,
 no pueden ser bases.
 debe cumplir que $UnW = 0$

> Determinamos la proyección de C en \vec{AB} para saber si \vec{AB} es 1 de los
 lados iguales o diferente a ellos.

$$\text{Proy}_{\vec{AB}} C = \frac{(C \cdot \vec{AB})}{|\vec{AB}|^2} \vec{AB}$$

$$\text{Proy}_{\vec{AB}} C = \frac{(5, 4, 8) \cdot (B-A)}{|\vec{AB}|^2} \vec{AB}$$

$$\text{Proy}_{\vec{AB}} C = \frac{(5, 4, 8) \cdot (3, 2, -3)(B-A)}{(B-A)^2 \cdot 22} \vec{AB}$$

$$\text{Proy}_{\vec{AB}} C = \frac{1}{132} (\vec{AB})$$

Como no es la mitad de \vec{AB}
 concluimos que \vec{AB} es uno de los
 lados iguales del triángulo
 isósceles.

> Supongamos que $|\vec{AB}| = |\vec{CA}|$

$$6\sqrt{22} = |(-5+4, 8) + (-5+3x, 2x, 10-3x)|$$

$$(6\sqrt{22})^2 = |(3x-10, 2x-4, 2-3x)|^2$$

$$792 = (3x-10)^2 + (2x-4)^2 + (2-3x)^2$$

$$792 = 22x^2 - 64x + 120$$

$$0 = 22x^2 - 64x - 672$$

Sea a la solución de la
 ecuación.

$$A = (-5+3a, 2a, 10-3a)$$

$$B = (-5+3(6+a), 2(6+a), 10-3(6+a))$$